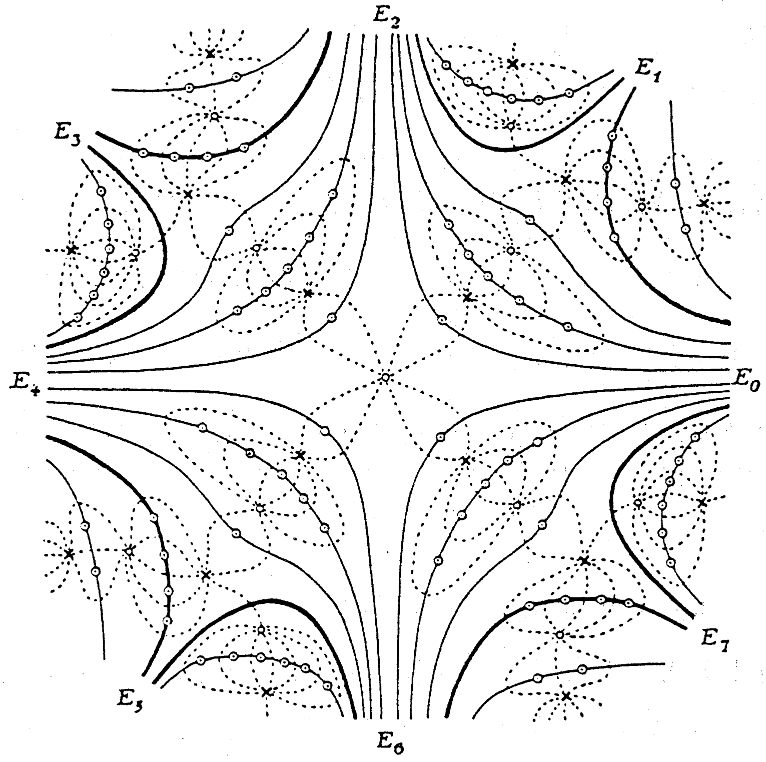
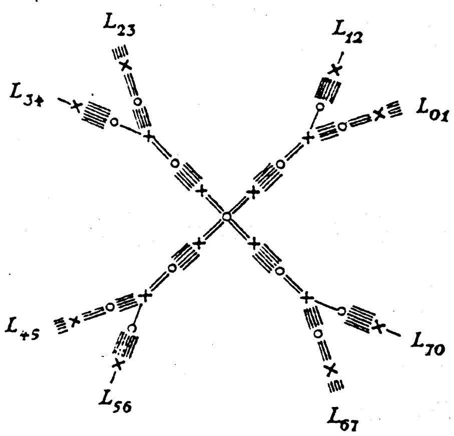
数理解析研究所講究録
1153 巻 2000 年 103-112

整函数の構成：断章

谷口雅彦

京都大学大学院理学研究科





1 Sullivan の辞書から

有限生成クライン群の根源的な有限性はメビウス変換（リーマン球面の普遍被覆写像）の作用の有限的結合であった。また、Klein-Maskit による combination （結合と分解）の観点からは、基本構成単位からの有限的構成可能性が、代数的有限性であるとも考えられる。

翻って、多項式、より一般に整函数の有限性はもっぱら targets における有限性が主流であるように思える。(たとえば [8] や [10] などを参照せよ。) これはむしろ、クライン群論における解析的有限性に対応しているのであろう。構成的な立場からすれば、適当な building blocks からの有限的構成可能性こそ、整函数の有限性を理解するもっとも intrinsic な概念であると考えられるのではないだろうか。

Kleinian Groups	**Entire Functions**
generators	building blocks
analytically finite	of Speiser class
finitely generated	structurally finite(*New*)

Sullivan の辞書

まず building blocks の定義からはじめる。

定義 building blocks となる covering structure は $a\exp z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と $z^2 + c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で、それぞれ *exp-block* と *quadratic block* とよぶ。

ここで、covering structures は境界や分岐点を許す。いわば被覆領域構造である。上記の 2 種はもっとも単純な singular covering structures である。もちろんもっとも単純な covering structures は、複素平面の普遍被覆構造、すなわち相似変換の表す covering structures（後の $\mathbb{C}$-piece ）である。

2 整函数にとっての combination

これらの構成単位を結合させるには、 Klein-Maskit 型の combination (cf. [6]) の類似手術を考えることになる（以下では簡単のため Klein の combination について述べる)。

定義 ふたつの、整函数から誘導される covering structures $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ から、covering structure $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が *(Klein's) combination surgery* で得られるとは、それらの singular values の集合 A_j が cross cut で分離できるとして、さらにつぎの条件が成り立つこととする：

A_1 and A_2 を分離する cross cut L を適当に固定し、$\mathbb{C} - L$ の A_j を含む成分を D_j とする。（L の取り方は一意的ではないが、ここでは問題ではない。）

このとき、$f_j^{-1}(D_{3-j})$ の成分 $\tilde{D}_j$ で、$f_j : \tilde{D}_j \to D_{3-j}$ が biholomorphic であるものが存在して、$\tilde{D}_j$ を f_j の定義域から除いた領域を covering structures を保ったまま境界に沿って貼り合わせたものが covering structure f となる。

注意 したがって、combination surgery のためのデータは、ふたつの covering structures と cross cut の（$\mathbb{C} - (A_1 \cup A_2)$ での）homotopy 類、および cut-off leaves からなるといえる。

例 1 *1.* 二つの *quadratic blocks* からは *cubic polynomial* が得られる。

2. Quadratic block と *exp-block* から *simply decorated exponential function* $(az + b) \exp z$ が得られる。

定義 整函数が *structurally finite* であるとは、有限個の building blocks から (Maskit's) combination surgeries により構成できることとする。

次により大域的な特徴付けを与えよう。

定義 Holomoprhic endomorphism f が $\mathbb{C}$ を *almost evenly* に被覆するとは、有限個の点を除き evenly covered で、さらに除外点 a においても a 中心の任意の円板 B にたいし、$f|_{B'}$ が biholomorphic map でない $f^{-1}(B)$ の成分 B' は有限個しかないことをいう。

命題 1 任意の *structurally finite* な整函数は $\mathbb{C}$ を *almost evenly* に被覆する。

逆に任意の整函数で $\mathbb{C}$ を *almost evenly* に被覆するものは *structurally finite* である。

前半は明らか。後半の証明は実際に、combinaiton の逆操作で分解すればよい。単純でない critical points をも許すために、Maskit の combinaiton に対応する分解を考えるのである。

例 2 (cf. [12]) 多項式を *Schwarzian derivative* にもつ整函数は *structurally finite* である。

命題 2 与えられた個数の *exp-blocks* と *quadratic blocks* から得られる *structurally finite* な整函数全体の族は *topologically strongly complete* である。

ここで整函数の族が *topologically strongly complete* であるとは、その族の元に topologically equivalent な任意の整函数が、常にその族に属する元と conformally conjugate であることを言う。

3 Configuration tree（moduli の縮約）

結合手術は単純な樹形図により表示できる。ただしそのためには、building blocks ではなく、剛性を持つ構成単位を考えなければならない。

定義 整函数 g が *rigid piece* であるとは、任意の整函数で g に topologically equivalent なものは g に conformally equivalent であることとする。

Locally univalent な rigid pieces のなかでは、相似変換 (universal covering structures $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) や exponential function (universal covering structures $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$) がもっとも単純で基本的である。これらを *basic rigid pieces* と呼ぶ。さらにそれぞれ $\mathbb{C}$-piece および exp-piece ともいう。

注意 そのほかにも locally univalent rigid pieces として

$$\text{exp-block} + \text{exp-block}$$

がある。ただし + は combination を表す。なお、このような函数を Cerf(z) と記す（その理由は後述する)。

また sine functions も rigid piece である。

さて basic rigid pieces を building blocks に用いるとすれば、結合方法は 2 種必要である。ひとつは上記の combination であり、もうひとつは（各 block の内在パラメータ以外に余分なパラメータを生じる）decoration と呼ばれる結合法で（[11])、忠実性は落ちるもののきわめて有効な手術であると思われる。$\mathbb{C}$ を decorate するとき、特に「象嵌」あるいは $\mathbb{C}$-decoration と呼ぶ（「象嵌」という用語は諸沢氏による。[9] を参照せよ)。

象嵌の最大の利点は、$\mathbb{C}$-pieces を vertices として表現できることで、この事実からさらに exp-piece を、変形を許さない vertices の stalk として表す表現へと至る。

注意 クライン図は忠実に被覆状況を記述する。それを簡素化したものがリーマン図であった。(最初のページの図は [16] から採った。目下の状況では剛性により、さらに簡略化が可能なのである。有理函数ではこのような簡略化は無い ([4] 等も参照せよ)。

例 3 *1. Quadratic block* に *$\mathbb{C}$-decoration* を行うことは、*combination* では

$$\textit{quadratic block} + \textit{quadratic block}$$

と表せる。

2. Exp-block に *$\mathbb{C}$-decoration* を行えば

$$\textit{exp-block} + \textit{quadratic block}$$

である。*Simply decorated exponential function* と呼ぶ所以である。

Decoration の視点から見える全体構造は moduli の縮約を意味する tree として表現できる。これを *configuration tree* という。

指示書

1. Structurally finite な整函数の configuration tree は vertices と edges からなる。
2. Vertices は 2 種に分かれる。白頂点は exp-blocks に対応する頂点群で、$\mathbb{Z}$ により符号付けられている。(ただし conformal conjugacy class の意味ですら、符号付けが重要なのではなく、単に「相互距離」のみが問題であるので、符号付けは表記しない。)
   黒頂点は decorate された $\mathbb{C}$ を表す。
3. Edges もまた 2 種に分けられる。 Exp-block から生じるものは *rigid edges* とよばれ太線で描かれる。Decorations から生じるものが accessary parameters をもつ edges である。(本来はこのデータが一致しないと conformally conjugate にならないが、簡単のため省略する。)
4. Combination は 2 頂点の縮約でもあるから、それらを囲む loop で表すことにする。

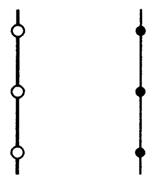


図 1: Configuration tree of $a \exp z + b$ and $a \sin z + b$

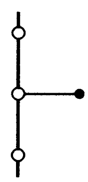


図 2: Configuration tree of $(az + b) \exp z$

注意 (Marking data) 正確には combination の際には cross cut の homotopy 類の指定が必要であった。Decoration でも accessary parameters のみではなく、decoration cuts の homotopy 類が指定されなければならない (cf. [11])。

さて、configuration trees の例を列記しておく (図 1-4)。

なおこのようにして、有限性のもうひとつの定式化を得る

命題 3 整函数 f が *structurally finite* であるのは f が有限個の *exp-blocks* から、有限回の *combinations* と *decorations* により得られるものであることと同値である。

最後に、二つの整函数 f と g が *combinatorially equivalent* であるとは、それらの configuration trees が同一であることをいう。

さらに整函数 f が *combinatorially rigid* であるとは、すべての f に combinatorially equivalent な整函数が f に conformally equivalent であることとする。(non-ridigity から広い意味での moduli が生じる。)

ここで、building blocks は combinatorially rigid であるが、sine functions は combinatorially rigid ではないことに注意せよ。(Sine family の topological completeness はその"orbit relations" に由来する。)

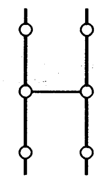


図 3: Configuration tree of $a \exp z^2 + b$

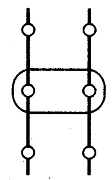


図 4: Configuration tree of Cerf(z)

4 Representation theorem

次の表現定理により、位相的な定義から出発したstructurally finite な整函数のさまざまな解析的有限性を導くことができる。

定理 4 任意の *structurally finite* な整函数は、適当な多項式 P と Q を用いて、

$$\int^z P(t)e^{Q(t)}dt$$

とあらわせる。

証明は quasiconformal equivalence への帰着と configuration tree の simple move により得られる。

注意 このような函数はさまざまな文脈で例として表れている。たとえば [1] [2] [13] などを挙げておく。

系 1 任意の *structurally finite* な整函数 f は *rational* な *pre-Schwarzian derivative (non-lineality)* Nf をもつ。

より正確には整函数が *structurally finite* であるのは、その *pre-Schwarzian derivative* が、適当な多項式 P と Q により

$$Nf = (P'/P) + Q$$

の形に書けることと同値である。

特に任意の *structurally finite* な整函数は *rational* な *Schwarzian derivative* をもつ。

さらに、Laine [5] に $\mathbb{C}^*$ への locally univalent な holomorphic endomorphisms の schwarzian derivatives に関する定理がある。

注意 k 次の多項式 P と n 次の多項式 Q から得られる族

$$\mathcal{SF}_{k,n} = \left\{ \int^z P(t)e^{Q(t)}dt \right\}$$

は $\mathbf{C}^{k+n+2}$ に埋め込める。実際 P と Q は $k+n+2$ coefficcients をもつが、Q の定数項と P の最高次の係数は従属している。integral constant がもうひとつのパラメータである。

簡潔な表現空間を許すことが、有限生成クライン群の研究にとって有用であることを想起せよ。

系 2 *Structurally finite* な超越整函数は *pre-Schwarzian derivative* が ∞ の近傍で *bounded* のときかつそのときに限り *simply decorated exponential function* である。

系 3 Cerf(z) は

$$a\int_0^z e^{t^2}dt + b$$

の形の整函数と *conformally conjugate* である（これが複素誤差函数：*Cerf* とよぶ所以である)。

Julia 集合の面積に関しては

定理 5 *Structurally finite* な整函数が *expanding* なら $J(f)$ は *vanishing area* を持つ。

注意 Devaney-Keen [3] は McMullen [7] の手法を用いて、Schwarzian derivative が polynomial で expanding (meromorphic) なら Julia 集合は vanishing area を持つことを述べている。[14] も参照せよ。

定理 6 すべての *structurally finite* な超越整函数のジュリア集合の *Hausdorff dimension* は 2 である。

超越整函数のジュリア集合の Hausdorff dimension については、さらに [15] も参照せよ。

参考文献

[1] I. N. Baker, *Wandering domains in the iteration of entire functions,* Proc. London Math. Soc. (3) **49** (1984), 563–576.

[2] W. Bergweiler, *Newton's method and a class of meromorphic functions without wandering domains,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **13**, (1993), 231–247.

[3] R.L. Devaney and L. Keen, *Dynamics of meromorphic maps with polynomial Schwarzian derivative,* Ann. Sci. École Norm Sup **22**, (1989), 55–81.

[4] L. Goldberg, *Catalan numbers and branched coverings by the Riemann sphere,* Adv. Math. **85**, (1991), 129–144.

[5] I. Laine *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations,* Walter de Gruyter , 1993.

[6] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups,* OUP, 1998.

[7] C.T. McMullen, *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions,* Trans. A.M.S., **300**, (1987), 329-342.

[8] C.T. McMullen and D. Sullivan, *Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics III,* Preprint.

[9] S. Morosawa 象嵌指数関数のジュリア集合について, RIMS 講究録 **1042** (1998), 221-230.

[10] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics,* Cambridge Univ. Press, 1999.

[11] M Taniguchi, *Topological completeness of decorated exponential families,* Sci. Bull. of Josai Univ. **4** (1998) 1-10.

[12] R. Nevanlinna, *Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten,* Acta Math. **58**, (1932).

[13] R. Nevanlinna, *Analytic Functions,* Springer, 1970.

[14] G.M. Stallard *Entire functions with Julia sets of zero measure,* Math Proc. Camb. Phil. Soc. **108** (1990) 551-557.

[15] G.M. Stallard *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions I,II,III,* I: Ergod. Th. and Dynam. Sys. **11** (1991), 769–777; II: Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **119** (1996), 513–536; III: ibid. **122** (1997), 223–244.

[16] H. Wanger, *Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten,* J. reine angew. Math. **175** (1936), 6-49.